数理解析研究所講究録
1529巻 2007年 74-86

Asymptotic stability of small solitons for NLS with potential

水町　徹 (Tetsu Mizumachi)
九州大学数理学研究院 (Faculty of Mathematics, Kyushu University)

1 Introduction

非線形シュレディンガー方程式

$$\text{(NLS)} \qquad \begin{cases} iu_t + \Delta u = Vu + f(u) & \text{for } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

の小さな定常波解の安定性について考察する。ここで $V(x)$ は実数値関数であり、$f(u) = \alpha|u|^{p-1}u$, $\alpha = \pm 1$. とする。(NLS) はレーザービームやBECなど、波長が揃った分散性の弱い現象を記述するモデル方程式として様々な場面で現れる。$\varphi_E(x)$ を

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta\phi_E + E\phi_E = V\phi_E + \alpha|\phi_E|^{p-1}\phi_E & \text{for } x \in \mathbb{R}^2, \\ \lim_{|x|\to\infty} \phi_E(x) = 0. \end{cases}$$

の解とし，$u(t,x) = e^{-iEt}\varphi_E(x)$ とおくと，u は形状が時刻 t に依存しない (NLS) の解である．この解は定常波解と呼ばれ，その中でも (1) の中で最もエネルギー順位の低い ground state とよばれる解が (NLS) の解の中で重要な役割を果たす.

非線形シュレディンガー方程式はハミルトニアン系であり、

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 + \frac{2\alpha}{p+1}|u|^{p+1} \right) dx \qquad \text{(Hamiltonian)},$$

$$N(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \qquad \text{(charge)},$$

などの保存量を持つ．これらの保存量を用いて ground state の安定性は 1980 年頃から活発に研究された．$V \equiv 0$, $\alpha < 0$ (非線形項が attractive) の場合，$p < 1 + 4/n$ であれば，ground state はリャプノフ安定であり，$p \geq 1 + 4/n$ であれば不安定なことが知られている ([6, 14, 34])．また $V \not\equiv 0$ の場合，ground state の安定性は [29, 32] らにより研究された．

(C) ground stateが安定な場合，ほとんどの(NLS)の解は時間が経つと複数個のground state と高さの減衰する波の重ね合わせになる

ことが期待されているが，まだわからないことが多く残されている([39] 参照).

本稿では $V \not\equiv 0$ が以下の(V1)-(V3)をみたす C^1-級関数の場合に，小さな定常波解の漸近安定性について考察する．

(V1) $V(x)$ は $|x| \to \infty$ で十分速く減衰する．

- $n = 1$ のとき $(1+x^2)V(x) \in L^1(\mathbb{R})$,
- $n = 2$ のとき $\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\langle x\rangle^{3+0}(|V(x)| + |\nabla V(x)|) < \infty$

(V2) $L = -\Delta + V$ は $\lambda = E_* < 0$ で唯一つの固有値を持つ．

(V3) 0はLのレゾナンスではない．．

以上の仮定の下で，(1)の定常波解が構成できることが知られている([35]).

Proposition 1. *Assume (V1)-(V3). Let $n = 1, 2$ and let δ be a small positive number. Suppose that $E \in (E_*, E_* + \delta)$ and $\alpha = 1$ or $E \in (E_* - \delta, E_*)$ and $\alpha = -1$. Then, there exists a positive solution ϕ_E to* (1) *such that for every $k \in \mathbb{N}$,*

1. $\langle x\rangle^k \phi_E \in H^1$,

2. *The function $E \mapsto \langle x\rangle^k \phi_E$ is C^1 in H^1 for every $k \in \mathbb{N}$, and as $E \to E_*$,*

$$\langle x\rangle^k \left(\phi_E - |E - E_*|^{1/(p-1)} \left(\|\phi_*\|_{L^{p+1}}^{-(p+1)/(p-1)}\phi_*\right) = O(E - E_*)\right) \quad \textit{in } H^1.$$

2 漸近安定性に関する既知の結果

2.1 $V \not\equiv 0$の場合

$n \geq 3$, (V1)-(V3)の仮定の下でSoffer-Weinstein[36]は，$\|u_0\|_{L^1\cap H^1}$ が小さければ，$t \to \infty$ で (微小な) 定常波と散乱波 ($e^{it\Delta}v_+$ と表される波) の和で表されることを証明した．証明の鍵となったのは[17]による $L^p - L^{p'}$-評価である．またYau-Tsai[38, 40, 44, 45, 46]は(V2)の条件を一般化し，作用素 L が2つ以上の固有値を持つ場合を研究した．$V \equiv 0$ の場合の対応する結果は[4]と[5]により証明された．

以下にこれらの結果の端緒となった Soffer-Weinstein の証明の概略を紹介する．解を定常波の部分と残りの部分を表す $v(t,x)$ に分解する．

$$u(t,x) = e^{-i\theta(t)}(\phi_{E(t)}(x) + v(t,x)). \tag{2}$$

$E(t)$ は振幅，$\theta(t)$ は位相を表すパラメーターである．(2) を (NLS) に代入すると，

$$iv_t = Lv + g_1 + g_2 + g_3 + g_4, \tag{3}$$

$$g_1(t) = -\dot{\theta}(t)v(t), \quad g_2(t) = (E(t) - \dot{\theta}(t))\phi_{E(t)} - i\dot{E}(t)\partial_E\phi_{E(t)},$$
$$g_3(t) = f(\phi_{E(t)} + v(t)) - f(\phi_{E(t)}) - \partial_\varepsilon f(\phi_{E(t)} + \varepsilon v(t))|_{\varepsilon=0},$$
$$g_4(t) = \partial_\varepsilon f(\phi_{E(t)} + \varepsilon v(t))|_{\varepsilon=0} = \alpha\phi_{E(t)}^{p-1}\left(\frac{p+1}{2}v(t) + \frac{p-1}{2}\overline{v(t)}\right),$$

となる．$V = {}^t(v,\bar{v})$ とすると，(3) 線形化方程式は

$$iV_t = \mathcal{L}_{E(t)}V,$$
$$\mathcal{L}_E = (-\Delta + V + \frac{p+1}{2}\phi_E^{p-1})\sigma_3 + \frac{p-1}{2}\phi_E^{p-1}i\sigma_2.$$

$\mathcal{L}_E$ のスペクトル $\sigma(\mathcal{L}_E)$ は，$\sigma(\mathcal{L}_E = \{0\} \cup \sigma_{ess}(\mathcal{L}_E)$, $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_E)$ は連続スペクトルで $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_E) = \{k \in \mathbb{R} : |k| \geq E\}$，0 は多重度 2 の固有値となる．また 0-広義固有空間は

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}\phi_E \\ -\phi_E\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\partial_E\phi_E \\ \partial_E\phi_E\end{pmatrix}\right\}$$

となる．$\mathcal{P}_E$ を $\mathcal{L}_E$ の連続スペクトルの空間への spectral projection とするとき，$\mathcal{P}_{E(t)}V(t) = 0$ となるように次の制約条件を課す．

$$\langle \Re v(t), \phi_{E(t)}\rangle = \langle \Im v(t), \partial_E\phi_{E(t)}\rangle = 0. \tag{4}$$

(4) を t について微分し (3) を代入すると，

$$\begin{pmatrix}\dot{E}(t) \\ \dot{\theta}(t) - E(t)\end{pmatrix} = O(\|e^{-\sqrt{|E(t)|}|x|/2}v\|_{L^2}^2) \tag{5}$$

が得られる．従って $\lim_{t\to\infty} E(t)$ が存在するためには，適当な重みつき空間を W とすると，$v \in L^2(0,\infty;W)$ となることを示せばよい．(3) の g_1 を消去するために，$w(t) = e^{-i\theta(t)}v(t)$ とおくと，

$$w(t) = e^{-itL}w(0) - i\sum_{2\leq j\leq 4}\int_0^t e^{-i(t-s)L}e^{-i\theta(s)}g_j(s)ds. \tag{6}$$

となる．g_2 は v についての良い減衰評価があれば (5) を使って処理できるので，g_3+g_4 について考える．

$$g_3(t)+g_4(t)=O(g_I(t)+g_{II}(t)), \qquad g_I(t)=\phi_E(t)^{p-1}v(t), \quad g_2(t)=|v(t)|^{p-1}v(t)$$

であり，

- $g_I(t)$ は，p が Strauss の臨界冪よりも大きければ，$\|v(t)\|_{L^{p+1}}$ を評価することで処理できる．

- $g_I I$ は，$v(t)$ について 1 次の項なので，g_{II} が扱えるためには，適当な空間 X で $\|v(t)\|_X \sim t^{-1-0}$ であることが必要になる．

$$\|e^{itL}P_c\|_{B(L^p,L^{p'})} \lesssim t^{-n/2+n/p}$$

であるから，$\|u\|_W := \|\langle x\rangle^{-\sigma}u\|_{L^2}$，$\|u\|_X \lesssim \|u\|_{L^q}, q>2n/(n-2)$ となるように X をとると，多少不正確な書き方であるが，

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t e^{i(t-s)L}P_c g_{II}(s)ds\right\|_X\\ \lesssim&\int_0^t \langle t-s\rangle^{-n(1/2-1/q)}\|g(s)\|_{L^{q'}}ds\\ \lesssim&\int_0^t \langle t-s\rangle^{-n(1/2-1/q)}\langle s\rangle^{-n(1/2-1/q)}ds\sup_s\left(\langle s\rangle^{n(1/2-1/q)}\|v(s)\|_X\right)\\ \le&\varepsilon\langle t\rangle^{-n(1/2-1/q)},\end{aligned}$$

であり，$E\to E_*$ のとき $\varepsilon\to 0$ となるようにとれる．

従って $\|v\|_X \lesssim \langle t\rangle^{-n(1/2-1/q)}$ を示せばよいが，このとき $p\ge 1+4/n$ が必要になる ([36] では，$n=3, p>2$ の場合を証明したことになっているが，補間不等式の指数の計算を間違えたためではないかと思う)．

2.2 $V\equiv 0$ の場合

$V\equiv 0$ の場合，定常波の生み出すポテンシャル項 g_4 を摂動として扱うことは出来ない．Buslaev-Perelman[3, 4] は $n=1$ の場合，Cuccagna[9] は $n\ge 3$ の場合に定常波解の周りでの線形化作用素の生成する半群の評価をし，定常波解の漸近安定性を証明した．非自励系

の半群の時間大域的な評価を得るのは難しいので，Buslaev-Perelman[3, 4] や Cuccagna[9] では，$\lim_{t\to\infty} E(t) = E_+$ であり，$E(t) - E_+$ が t について可積分の場合を扱っている（このとき $\phi_{E_+}(x)$ は $\phi_{E(t)}(x)$ のよい近似を与え，定常波解の周りでの線形化作用素が実質的に t に依存しない）．

Remark 1. $\mathcal{L}_E$ は自己共役作用素ではなく *[17]* の結果を適用することは出来ない．*Cuccagna[9]* は $n \ge 3$ の場合に *Yajima([42, 43])* による波動作用素の L^p-有界性に関する研究を応用し，ベクトル値のシュレディンガー方程式に対して $L^p - L^{p'}$-評価を証明した．$e^{it\mathcal{L}_E}\mathcal{P}_E$ についての $L^p - L^{p'}$ 評価が得られれば，$n \ge 3$ の場合，*ground state* の漸近安定性は *Soffer-Weinstein[36]* と同様に示すことが出来る．その後 *Perelman[30]* は，パルス間に相互作用のほとんどない *multi-pulse* 解の漸近安定性を証明した．

Remark 2. 基本解は空間次元が低いほどゆっくり減衰し，

$$\|e^{it\Delta}\|_{B(L^1,L^\infty)} \lesssim t^{-n/2}$$

なので，$n = 1, 2$ の場合には *[9, 36]* とは異なる議論が必要である．*Buslaev-Perelman[3, 4]* は, $n = 1$, $\lim_{u\to 0} f(u)/|u|^9 = 0$ の場合に

$$\|\langle x\rangle^{-7/2-0} e^{itL} P_c f\|_{L^2} \lesssim t^{-3/2} \|\langle x\rangle^2 f\|_{L^1+L^2}$$

を用いて，*ground state* の漸近安定性を証明した．最近 *Krieger-Schlag[24]* が空間次元が *1* 次元の場合に *[3]* の計算方法を改良し，$p \ge 1 + 4/n$ の場合を研究した．また，*Kirr-Zarnescu[23]* は，*[35]* と同じ結果を $n = 2$ の場合に初期値の球対称性を仮定せずに証明した．これらの結果は何れも $u \sim 0$ で $|f(u)| \sim |u|^p$ $p \ge 1 + 4/n$ の場合を扱っている．

2.3 H^1 における漸近安定性

$V \equiv 0$, $p \ge 1 + 4/n$ の場合，H^1 で小さな解は，適当な $u_+ \in H^1$ に対して，$t \to \infty$ で $e^{it\Delta}u_+$ に収束する ([12] など). Gustafson-Nakanishi-Tsai[15] は，$n \ge 3$, $p \ge 1 + 4/n$ $V \not\equiv 0$ で (V1)-(V3) をみたす場合に，$\|u_0\|_{H^1}$ が小さければ解 u が $t \to \infty$ で定常波と散乱状態の和で表されることを示した．$V \equiv 0$ の場合と異なる点は,

- $\int_0^t e^{i(t-s)L} P_c g_I(s)ds$ の評価
- (5) から $\lim_{t\to\infty} E(t)$ が存在することを示す

の2点であるが，彼らはStrichartzの端点評価を用いてエネルギー空間における漸近安定性を証明した．

$$q, r \geq 2, \quad \frac{2}{q} + \frac{n}{r} = \frac{n}{2}, \quad (q, r, n) \neq (2, \infty, 2)$$

を満たすとき，(q, r) の組を admissible であるという．

Lemma 2. *(Strichartz estimate,[20]) Assume (V1)-(V3).*

(a) Suppose that (q, r) is admissible. Then there exists a positive number C such that for every $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|e^{-itL} P_c f\|_{L_t^q L_x^r} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

Furthermore, it holds that

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{isL} P_c g(s, \cdot) ds \right\|_{L_x^2} \leq C \|g\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}.$$

(b) Suppose that (q_1, r_1) and (q_2, r_2) are admissible. Then there exists a positive number C such that for every $g(t, x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$,

$$\left\| \int_0^t e^{-i(t-s)L} P_c g(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}} \leq C \|g\|_{L_t^{q_2'} L_x^{r_2'}}.$$

[15] は Lemma 2 で，$(q, r) = (2, 2n/(n-2))$ $n \geq 3$ の場合を用いて $\lim_{t \to \infty} E(t)$ が存在することを示した．しかし，$n = 1$ のとき，q の値が最も小さくなる組は，$(q, r) = (4, \infty)$ であり，$n = 2$ の場合も (q, r) が admissible ならば $q > 2$ なので，$n = 1, 2$ の場合は Strichartz 評価だけでは $\lim_{t \to \infty} E(t)$ が存在し，定常波解が漸近安定であることをを示すのには不十分である．

3 主結果と補題

以下に私自身の結果を述べる．$P_d u = \langle u, \phi_* \rangle \phi_*$，$P_c u = (I - P_d) u$ とする．

Theorem 3. *Assume (V1)-(V3). Let $p \geq 1 + 4/n$ and let ε_0 be a sufficiently small positive number. Suppose $\|u_0\|_{H^1} < \varepsilon_0$. Then there exist an $E_+ < 0$, a C^1 real-valued function $\theta(t)$ and $v_+ \in P_c H^1(\mathbb{R}^2)$ such that*

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t) - e^{i\theta(t)} \phi_{E_+} - e^{-itL} v_+\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Theorem 3は，Strichartzの端点評価の代わりに，時間大域的な局所平滑評価 (Lemmas 4–7) を用いて証明した．Kato([18]) により得られたKdV方程式のlocal smoothing effectを表す不等式は，近年のMartel-Merleの研究でKdV方程式の孤立波解の漸近安定性を示す上で重要なことがわかった．シュレディンガー方程式のlocal smoothing estimateは，定数係数の場合Constantin-Saut[8]やKenig-Ponce-Vega[21, 22], [47, 31]などにより示され，$n \geq 3$, $V \not\equiv 0$の場合はBen-ArtziとKlainerman[1]により示された．Theorem 3の証明には，Lemma 2の他に以下の不等式を用いる．

Lemma 4. *Let $n = 1$. Assume (V1) and (V2).*

(a) There exists a positive constant C such that for any $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|\langle x\rangle^{-3/2} e^{-itL} Qf\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|f\|_{L^2}, \tag{7}$$

$$\|\partial_x e^{-itL} Qf\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|f\|_{H^{1/2}}. \tag{8}$$

(b) There exists a positive constant C such that for any $g(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{isL} Qg(s,\cdot)ds\right\|_{L_x^2} \leq C\|\langle x\rangle^{3/2} g\|_{L_x^1 L_t^2}, \tag{9}$$

Lemma 5. *Let $n = 1$. There exists a positive constant C such that for any $g(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ and $t \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{j=0,1}\left\|\langle x\rangle^{-1}\partial_x^j \int_0^t e^{-i(t-s)L} Qg(s,\cdot)ds\right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|\langle x\rangle g\|_{L_x^1 L_t^2}. \tag{10}$$

Furthermore, if $\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{\alpha|x|}|V(x)| < \infty$ holds for an $\alpha > 0$, there exists a positive number C such that

$$\left\|\int_0^t \partial_x e^{-i(t-s)L} Qg(s,\cdot)ds\right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|g\|_{L_x^1 L_t^2}. \tag{11}$$

Lemma 6. *Let $n = 2$ and $s > 1$. Assume (V1)–(V3). Then there exists a positive constant C such that*

$$\|e^{-itL} P_c f\|_{L_t^2 L_x^{2,-s}} \leq C\|f\|_{L^2}, \tag{12}$$

for every $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ and that

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{isL} P_c g(s,\cdot)ds\right\|_{L_x^2} \leq C\|g\|_{L_t^2 L_x^{2,s}}, \tag{13}$$

for every $g(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$.

Lemma 7. *Let $n=2$ and $s>1$. Then there exists a positive constant C such that*

$$\left\| \int_0^t e^{-i(t-s)L} P_c g(s,\cdot)ds \right\|_{L_t^2 L_x^{2,-s}} \leq C\|g\|_{L_t^2 L_x^{2,s}}. \tag{14}$$

for every $g(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ and $t \in \mathbb{R}$.

Remark 3. *[2]*は，L が *divergence form* の場合に *Paley-Littlewood* 分解を用いて

$$\|e^{itL} f\|_{\dot{B}^{1/2}_{2,\infty}} \lesssim \|f\|_{L^2} \tag{15}$$

を示している．しかし (5) を用いて $\lim_{t\to\infty} E(t)$ の存在を示すには，(7) のように解 u に微分がかからない状態を制御する必要がある．(15) と異なり，(7) は 0 がレゾナンスの場合には成立しない．*[27]* では，*Jost* 解を用いて *Green* 関数を書き下し，*non-resonance condition* が成り立つ場合には，(7) が成立することを示した．

4 証明の方針 ([27, 28])

空間 1 次元の場合を説明する．v についての評価は以下の量を用いて閉じることが出来る．

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M}_1(T) = \sup_{0\le t\le T} |E(t)-E_*|, \quad \mathbb{M}_2(T) = \|\langle x\rangle^{-3/2} P_c w\|_{L_x^\infty L^2(0,T)},\\
&\mathbb{M}_3(T) = \|P_d w\|_{L_x^\infty L^2(0,T)} + \|\partial_x P_d w\|_{L_x^\infty L^2(0,T)},\\
&\mathbb{M}_4(T) = \|(L-E_*+1)^{1/2} P_c w\|_{L^q(0,T;L_x^{2p})\cap L^\infty(0,T;L_x^2)} + \|P_c w\|_{L^4(0,T;L_x^\infty)},\\
&\mathbb{M}_5(T) = \|P_d w\|_{L^4(0,T;W_x^{1,\infty})\cap L^\infty(0,T;H_x^1)}, \quad \mathbb{M}_6(T) = \|\partial_x P_c w\|_{L_x^\infty L^2(0,T)}.
\end{aligned}$$

ただし，$4/q = 1-1/p$ とする．特に，

$$g_3 + g_4 = O(g_I + g_{II})$$

の評価について説明する．g_I については，$V\equiv 0$, $\|u_0\|_{H^1}$ の場合と同様に評価できる．一方 Lemma 2 において右辺を $\|g_{II}\|_{L_t^{q_2'} L_x^{r_2'}}$ $(q_2,r_2)=(2,\infty)$ とすることは出来ないので，その代わりに Christ-Kiselev の補題 ([7]) を用いて Lemma 2 と Lemma 4 を組み合わせたものを用いる．

Lemma 4 の証明の方針の概略は下記のとおり．$R(\lambda) = (\lambda - L)^{-1}$ とすると，$t \neq 0$, $f \in \mathcal{S}$ に対して，

$$\begin{aligned} P_c e^{-itL} f &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} dE_{ac}(\lambda) f \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} P_c(R(\lambda - i0) - R(\lambda + i0)) f d\lambda. \end{aligned}$$

が成り立つ．λ についての Plancherel の定理（正確には duality argument を用いる）から，$\|e^{itL}P_c\|_{L_t^2}$ の評価は，$\|R(\lambda \pm i0)\|_{L_\lambda^2}$ の評価に帰着される．

Lemma 8 (高周波数帯の評価). *Assume (V1) and (V2). Then there exist positive numbers M and C such that*

$$\begin{aligned} &\sup_x \|R(\lambda \pm i0)u\|_{L_\lambda^2(M,\infty)} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\ &\sup_x \|\partial_x(R(\lambda - i0) - R(\lambda + i0))u\|_{L_\lambda^2(M,\infty)} \leq C\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

for every $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lemma 9 (低周波数帯の評価). *Assume (V1) and (V2). Let M be a positive number given in Lemma 8. Then there exists a positive number C such that for every $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} &\sup_x \|\langle x\rangle^{-3/2} R(\lambda \pm i0)u\|_{L_\lambda^2(0,M)} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\ &\sup_x \|\partial_x R(\lambda \pm i0)u\|_{L_\lambda^2(0,M)} \leq C\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Lemmas 8, 9 における $\|R(\lambda \pm i0)\|_{L_\lambda^2}$ の評価は [13] 同様，基本解を Jost 解を用いて表し，Deift-Turbowitz[10] による Jost 解の評価を適用する．また Lemma 5 は，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-it\lambda}\{R(\lambda - i0) + R(\lambda + i0)\} P_c(\mathcal{F}_t^{-1}g)(\lambda, \cdot) \\ &= 2\int_0^t ds e^{-i(t-s)L} P_c g(s,\cdot) + \int_{-\infty}^0 ds e^{-i(t-s)L} P_c g(s,\cdot) - \int_0^{\infty} ds e^{-i(t-s)L} P_c g(s,\cdot). \end{aligned}$$

を用いて Lemma 4 と同じやり方で証明する．

参考文献

[1] M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrodinger equation*, J. Anal. Math. **58** (1992), 25–37.

[2] N. BURQ AND F. PLANCHON, *Smoothing and dispersive estimates for 1D Schrodinger equations with BV coefficients and applications*, J. Funct. Anal. **236** (2006), 265–298.

[3] V. S. BUSLAEV AND G. S. PERELMAN, *Scattering for the nonlinear Schrödinger equation: States close to a soliton*, St. Petersburg Math. J. **4** (1993), 1111–1142.

[4] V. S. BUSLAEV AND G. S. PERELMAN, *On the stability of solitary waves for nonlinear Schrodinger equations*, Amer. Math. Soc. Transl. **164** (1995), 75–98.

[5] V. S. BUSLAEV AND C. SULEM, *On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrodinger equations*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **20** (2003), 419–475.

[6] T. CAZENAVE AND P. L. LIONS, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrodinger equations*, Comm. Math. Phys. **85** (1982), 549–561.

[7] M. CHRIST AND A. KIESLEV, *Maximal functions associated with filtrations*, J. Funct. Anal. **179** (2001), 409–425.

[8] P. CONSTANTIN AND J. C. SAUT, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413–439.

[9] S. CUCCAGNA, *Stabilization of solutions to nonlinear Schrodinger equations*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), 1110–1145.

[10] P. DEIFT AND E. TRUBOWITZ, *Inverse scattering on the line*, Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979), 121–251.

[11] J. FROHLICH, T. P. TSAI AND H. T. YAU, *On the point-particle (Newtonian) limit of the non-linear Hartree equation*, Comm. Math. Phys. **225** (2002), 223–274.

[12] J. GINIBRE AND G. VELO, *On a class of nonlinear Schrodinger equations. II. Scattering theory, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 33–71.

[13] M. GOLDBERG AND W. SCHLAG, *Dispersive estimates for Schrodinger operators in dimensions one and three*, Comm. Math. Phys., **251** (2004), 157–178.

[14] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry*, J. Funct. Anal., **74** (1987), 160–197.

[15] S. Gustafson, K. Nakanishi and T. P. Tsai, *Asymptotic stability and completeness in the energy space for nonlinear Schrodinger equations with small solitary waves*, Int. Math. Res. Not. **66** (2004), 3559–3584.

[16] A. Jensen and G. Nenciu, *A unified approach to resolvent expansions at thresholds*, Rev. Math. Phys. **13** (2001), 717–754.

[17] J. L. Journe, A. Soffer, C. D. Sogge, *Decay estimates for Schrodinger operators*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 573–604.

[18] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in applied mathematics, 93–128, Adv. Math. Suppl. Stud., **8**, (1983).

[19] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.

[20] M. Keel and T, Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math. **120** (1998), 955–980.

[21] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 33–69.

[22] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrodinger equations*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **10** (1993), 255–288.

[23] E. Kirr and A. Zarnescu *On the asymptotic stability of bound states in 2D cubic Schroedinger equation*, Arxiv preprint math.AP/0603550.

[24] J. Krieger and W. Schlag, *Stable manifolds for all monic supercritical focusing nonlinear Schrodinger equations in one dimension*, J. Amer. Math. Soc. (to appear).

[25] Y. Martel and F. Merle, *A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Math. Pures Appl. (9), **79** (2000), 339–425.

[26] Y. MARTEL AND F. MERLE, *Asymptotic stability of solitons of the subcritical gKdV equations revisited*, Nonlinearity **18** (2005), 55–80.

[27] T. MIZUMACHI, *Large time asymptotics of solutions around solitary waves to the generaized Korteweg–de Vries equations*, SIAM J. Math. Anal., **32** (2001), 1050–1080.

[28] T. MIZUMACHI, *Asymptotic stability of small solitons to 1D NLS with potential*, Arxiv preprint math.AP/0605031.

[29] Y. G. OH, *Stability of semiclassical bound states of nonlinear Schrodinger equations with potentials*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 11–33.

[30] G. PERELMAN, *Asymptotic stability of multi-soliton solutions for nonlinear Schrodinger equations*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 1051–1095.

[31] F. PLANCHON, *Dispersive estimates and the 2D cubic NLS equation*, J. Anal. Math. **86** (2002), 319–334.

[32] H. A. ROSE AND M. I. WEINSTEIN, *On the bound states of the nonlinear Schrodinger equation with a linear potential*, Phys. D **30** (1988), 207–218.

[33] W. SCHLAG, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimension two* Commun. Math. Phys. **257** (2005), 87-117.

[34] J. SHATAH AND W. A. STRAUSS, *Instability of nonlinear bound states*, Comm. Math. Phys. **100** (1985), 173–190.

[35] A. SOFFER AND M. I. WEINSTEIN, *Multichannel nonlinear scattering theory for nonintegrable equations*, Comm. Math. Phys., **133** (1990), 119–146.

[36] A. SOFFER AND M. I. WEINSTEIN, *Multichannel nonlinear scattering theory for nonintegrable equations* II*: The case of anisotropic potentials and data*, J. Differential Equations, **98** (1992), 376–390.

[37] A. SOFFER AND M. I. WEINSTEIN, *Selection of the ground state for nonlinear Schrodinger equations*, Rev. Math. Phys. **16** (2004), 977–1071.

[38] T. P. TSAI AND H. T. YAU *Classification of asymptotic profiles for nonlinear Schrodinger equations with small initial data*, Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2002), 107–139.

[39] TERENCE C. TAO *A (concentration-)compact attractor for high-dimensional nonlinear Schrodinger equations*, math.AP/0611402.

[40] T. P. TSAI *Asymptotic dynamics of nonlinear Schrödinger equations with many bound states*, J. Differential Equations **192** (2003), 225–282.

[41] M. I. WEINSTEIN, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Pure. Appl. Math., **39** (1986), 51–68.

[42] K. YAJIMA, *The $W^{k,p}$-continuity of wave operators for Schrodinger operators*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 551–581.

[43] K. YAJIMA, *The $W^{k,p}$-continuity of wave operators for Schrodinger operators. III. Even-dimensional cases $m \geq 4$*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 2 (1995), 311–346.

[44] H. T. YAU AND T. P. TSAI, *Asymptotic dynamics of nonlinear Schrodinger equations: resonance dominated and radiation dominated solutions*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 1–64.

[45] H. T. YAU AND T. P. TSAI, *Stable directions for excited states of nonlinear Schrodinger equations*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 2363–2402.

[46] H. T. YAU AND T. P. TSAI, *Relaxation of excited states in nonlinear Schrodinger equations*, Int. Math. Res. Not. (2002), 1629–1673.

[47] K. WATANABE, *Smooth perturbations of the selfadjoint operator $|\Delta|^{\alpha/2}$*, Tokyo J. Math. **14** (1991), 239–250.